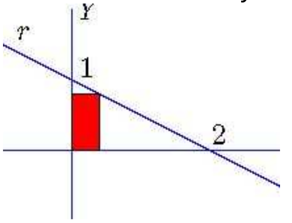
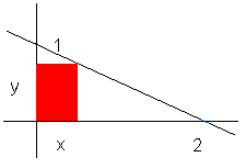
Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación x/2 + y = 1 (ver figura), determina el que tiene mayor



Solución



Función a optimizar Área = xy
Relación entre las variables x/2 + y = 1, de donde y = 1 – x/2

Recuerdo que:
Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo
Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo

$A(x) = x(1 – x/2) = x – x^2/2$
A '(x) = 1 – x, A '(x) = 0 nos da 1 – x = 0, de donde x = 1, con lo cual y = 1 – 1/2 = 1/2
Veamos que es un máximo
A ''(x) = – 1 < 0,, luego es un máximo.
Las dimensiones del rectángulo son x = 1 e y = 1/2

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Sea $\int \frac{2}{2-e^x}dx$

(a) [1 punto] Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$.
(b) [1'5 puntos] Calcula I.

Solución

(a) y (b)

$I = \int \frac{2}{2-e^x}dx$

Cambio $t = e^x$ de donde Ln(t) = x y por tanto (1/t).dt = dx

$$\int \frac{2}{2-e^x}dx = \int \frac{2}{2-t}(1/t)dt = 2\int \frac{dt}{2t-t^2}dx = 2\int \frac{dt}{t(2-t)} =$$

$$2\left[\int \frac{A}{t}dt + \int \frac{B}{(2-t)}dt\right] = 2(ALn(t) - BLn|2-t|) + K = 2(ALn(e^x) - BLn|2-e^x|) + K$$

La integral pedida es $I = 2Ax – 2BLn|2 – e^x| + K$

Vamos a calcular los coeficientes A y B para terminar

$$\frac{1}{t(2-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+Bt}{t(2-t)}$$

Para t = 0, 1 = 2A, de donde A = 1/2
Para t = 2, 1 = 2B, de donde B = 1/2

La integral pedida es $I = \int \frac{2}{2-e^x}dx = 2(1/2)x – 2(1/2)Ln|2 – e^x| + K = x – Ln|2 – e^x| + K$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (a+1)y + 2z &= y \;. \\ x - 2y + (2-a)z &= 2z \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 &\rightarrow x + y + z = 0 \\ (a+1)y + 2z = y &\rightarrow ay + 2z = 0 \\ x - 2y + (2-a)z = 2z &\rightarrow x - 2y - az = 0 \end{aligned}$$

Como vemos es un sistema homogéneo con matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial (0, 0, 0) el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser 0, es decir |A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} \underset{3^aF - 1^aF}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -3 & -a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

Igualando a cero $-a^2 - a + 6 = 0$, tenemos como soluciones a = 2 y a = - 3

Si a = 2 y a = - 3 el sistema es compatible e indeterminado.

Si a = 2, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x + y + z = 0

2y + 2z = 0. de donde tomando z = m tenemos y = - m y x = 0

Solución (x, y, z) = (0, -m, m) con $m \in \Re$

Si a = - 3, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x + y + z = 0

-3y + 2z = 0. de donde tomando z = m tenemos y = (2/3) m y x = (-5/3)m

Solución (x, y, z) = ((-5/3)m, (2/3)m, m) con $m \in$ R

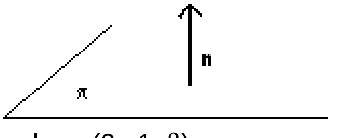
Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación 2x − y + βz = 0. Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

(a) [1 punto] La recta r es perpendicular al plano π.

(b) [1'5 puntos] La recta r está contenida en el plano π.

Solución



π de ecuación 2x − y + βz = 0. Vector normal **n** = (2, -1, β)

r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$. Punto A(1,0,1) y vector director **u** = (α, 4, 2)

(a)

Para que la recta r sea perpendicular al plano π, el vector normal del plano **n** y el vector director de la recta **u** han de ser paralelos, por tanto sus coordenadas proporcionales.

α/2 = 4/-1 = 2/β.

Igualando y operando tenemos.

De α/2 = 4/-1, obtenemos α = - 8

De 4/-1 = 2/β, obtenemos β = - 1/2

(b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π, el punto de la recta debe pertenecer al plano y los vectores **n** y **u** han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar valer 0.

Si A(1,0,1) ∈ π, sustituyendo obtenemos 2 + β = 0, de donde β = - 2

Como **n** y **u** son perpendiculares, **n • u** = ((2, -1, β)•(α, 4, 2) = 2α - 4 + 2β = 0. Sustituyendo el valor de β = - 2, nos resulta α = 4

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Sea f : ℜ → ℜ la función definida por f(x) = x^2e^{-x} .

(a) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución

f(x) = x^2e^{-x} = $(x^2)/(e^x)$

(a)

Estudiamos f '(x)

f(x) = x^2e^{-x}

f '(x) = $2x.\,e^{-x} + x^2(-1).\,e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

f '(x) = 0, $e^{-x}(2x - x^2) = 0$, de donde $2x - x^2 = x(2 - x) = 0$, con lo cual los posibles extremos relativos serán x=0, y x = 2. (La exponencial e^{-x} no se anula nunca porque siempre es > 0)

Recuerdo que:

Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo

Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo

f '(x) = $e^{-x}(2x - x^2)$

f ''(x) = $e^{-x}(-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

Como f ''(0) = 2 > 0, x = 0 es un mínimo relativo de f(x) que vale f(0) = 0

Como f ''(2) = $e^{-2}(4 - 8 + 2) < 0$, x = 2 es un máximo relativo de f(x) que vale f(2) = $4/(e^2) \cong 0'54$

(b)

Asíntotas verticales no tiene (no ha y ningún número que anule el denominador)

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞/∞, y si el límite tiende a ∞]

Como $\lim_{x\to\infty} x^2.e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, aplicándole la Regla de L'Hopital

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Volviéndole a aplicar la Regla

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) en + ∞

Como $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x} - 0\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x\to -\infty} x^2.e^{-x} = \lim_{x\to\infty}(-x)^2.e^{-(-x)} = \lim_{x\to\infty} x^2.e^{x} = \infty.\infty = \infty$, no A.H. en - ∞

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Sea f : (−2,0) → R la función definida mediante $f(x)=\begin{cases} \frac{\alpha}{x} & \text{si } -2<x\le -1 \\ \frac{x^2-\beta}{2} & \text{si } -1<x<0 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina α y β sabiendo que f es derivable.

(b) [1 punto] Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

Solución

(a)

Como la función es derivable, también es continua en particular en x = -1

f(x) es continua en x = -1 si y solo si $f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$

f(-1) = α/2(-1) = - α

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{-1} = -\alpha$$

Igualando tenemos (1- β)/2 = - α, de donde β = 1 + 2α

Como es derivable

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2x} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ \dfrac{x^2-\beta}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2\alpha}{2x^2} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ \dfrac{2x}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-\alpha}{x^2} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Como es derivable en x = -1 tenemos que f '(0 $^+$) = f '(0 $^-$)

$$f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1} (x) = -1$$

$$f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1} \left(\frac{-\alpha}{x^2}\right) = -\alpha$$

Igualando tenemos α = 1, de donde β = 1 + 2(1) = 3

La función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

(b)

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\left[Ln|x|\ \right]_{-2}^{-1} = \text{Ln}|-1| - \text{Ln}|-2| = \text{Ln}(1) - \text{Ln}(2) = 0 - \text{Ln}(2) = -\text{Ln}(2)$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + (\lambda+1)z &= \lambda + 2 \\ x + y + z &= 0 \\ (1-\lambda)x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

tiene más de una solución.

(a) [1'5 puntos] Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

(b) [1 punto] Halla todas las soluciones del sistema.

Solución

(a) y (b) (Entiendo como todas las soluciones del sistema cuando tiene infinitas soluciones)

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + (\lambda+1)z &= \lambda + 2 \\ x + y + z &= 0 \\ (1-\lambda)x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si tiene más de una solución tiene infinitas soluciones por tanto det(A) = 0. Después para dichos valores estudiaremos el rango de A*.

$$\det(A) = 0 = |A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^{a}C - 2^{a}C \\ 3^{a}C - 2^{a}C \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \lambda(-\lambda -1 -1) = \lambda(-\lambda - 2)$
$|A| = 0$, nos dice que $\lambda(-\lambda - 2) = 0$ de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$

Para que el sistema tenga **más de una solución $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$** , con lo cual rango(A) = 2

Si $\lambda = 0$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rango(A) = 2. En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)(-1) = -2 \neq 0$, rango($A^*$) = 3

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible (No es nuestro caso)
Si $\lambda = -2$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2 = rango($A^*$), porque la última columna de A^* es de ceros.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Para $\lambda = -2$, nuestro sistema es

$$2x + y - z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$3x + 2y = 0$$

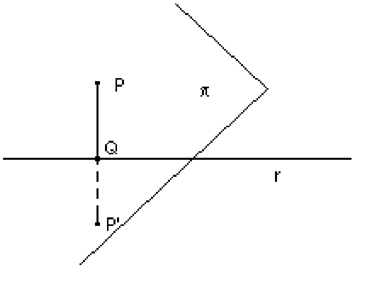
Como solo necesitamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales, al ser rango 2, tomo las dos primeras
$2x + y - z = 0$
$x + y + z = 0$, tomo $z = m$ y restando me queda $x - 2m = 0$, de donde $x = 2m$; con lo cual $y = -3m$.
Solución $(x,y,z) = (2m, -3m, m)$ con $m \in \Re$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Calcula la distancia del punto P(1,−3,7) a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$3x - y - z - 2 = 0$$
$$x + y - z + 6 = 0$$

Solución



d(P,P') = 2.d(P,Q), donde Q es la proyección ortogonal de P sobre la recta "r" y P' es el simétrico del punto P respecto de la recta "r"

De la recta "r"

$$3x - y - z - 2 = 0$$
$$x + y - z + 6 = 0$$

Tomamos un punto A y un vector director **u**

Para el punto A hacemos x = 0, con lo cual sumando sale z = 2 e y = - 4, luego A(0, -4, 2)

Un vector director de la recta es, **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(1 + 1) – **j**(-3 + 1) + **k**(3 + 1) = (2, 2, 4)

Calculamos el plano π perpendicular a la recta “r” que pasa por el punto P(1,−3,7). Su vector normal **n** es el vector director de la recta **u** = (2, 2, 4)
El plano pedido es 2x + 2y + 4z + K = 0. Le imponemos la condición de que pase por P(1,−3,7).
2(1) + 2(-3) + 4(7) + k = 0 , de donde K = -24 y el plano es 2x + 2y + 4z - 24 = 0. Simplificándolo x + y + 2z – 12 = 0
El punto Q es la intersección de la recta “r” con el plano, para lo cual ponemos la recta en paramétricas, y la sustituimos en el plano.
x = 0 + 2m
y = - 4 + 2 m
z= 2 + 4m

(2m) + (- 4 + 2m) + 2(2 + 4m) – 12 = 0 = 2m + 2m + 8m – 12 = 0, de donde m = 1 y el punto Q es Q(2(1), -4+2(1), 2+4(1)) = Q(2,-2,6)

d(P,Q) = ||**PQ**|| = $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
PQ = (2 – 1, -2 –(-3), 6 – 7) = (1, 1, -1)
La distancia pedida es d(P,P’) = 2.d(P,Q) = $2\sqrt{3}$ u.l.